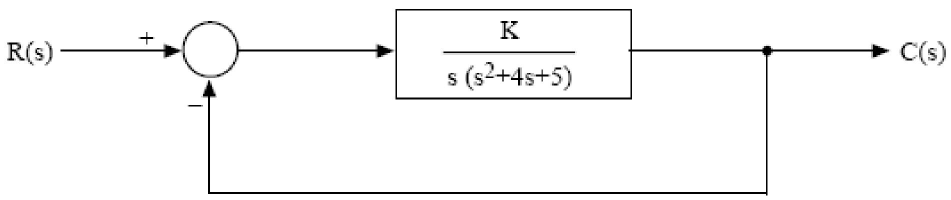
תרגילים במג"ש – Root Locus

תרגיל 1 – חיצוני 2003

באיור לשאלה 2 מתוארת מערכת בקרה עם משוב יחידה.



איור לשאלה 2

א. סרטט את המקום הגיאומטרי של שורשי המערכת הנתונה.

ב. קבע עבור אילו ערכי K תהיה המערכת הנתונה יציבה.

ג. כדי לשפר את יציבות המערכת, משנים את פונקציית התמסורת בחוג פתוח, והיא תהיה עתה: $G(s)=\dfrac{K\,(s+1)}{s\left(s^2+4s+5\right)}$.

סרטט את המ.ג.ש. של המערכת לאחר השינוי, והסבר מדוע השינוי שיפר את יציבות המערכת.

פתרון 1

א.

$$GH=\frac{K}{s(s^2+4s+5)}=\frac{K}{s(s+2+j)(s+2-j)}$$

זווית אסימפטוטה: $\beta=\dfrac{(2h+1)180}{n-l}=\dfrac{(2h+1)180}{3}=60,180,300$

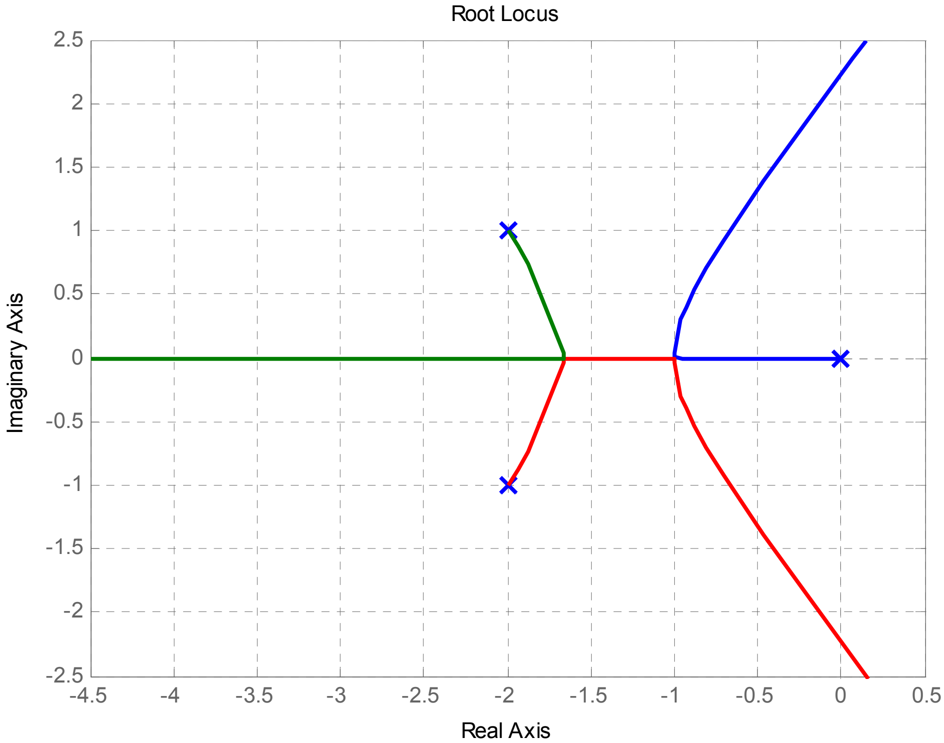
נקודת יציאת אסימפוטטות:

$$\sigma_0=\frac{\sum \mathrm{Re}(Pi)-\sum \mathrm{Re}(Zi)}{n-l}=\frac{(-2)+(-2)+0}{3}=-1.33$$

זווית יציאה של קוטב מרוכב (s=-2+j) :

$$GH' = \frac{K}{s(s+2+j)} = \frac{K}{(-2+j)(-2+j+2+j)} = \frac{K}{(-2+j)2j}$$

$$\phi = \arg(GH') + 180 = -243 + 180 = -65°$$



נקודות בריחה וחדירה:

$$\frac{1}{\sigma_b + 2 + j} + \frac{1}{\sigma_b + 2 - j} + \frac{1}{\sigma_b} = 0$$

$$\frac{2\sigma_b + 4}{{\sigma_b}^2 + 4\sigma_b + 5} + \frac{1}{\sigma_b} = 0$$

$$\frac{2\sigma_b^2 + 4\sigma_b + {\sigma_b}^2 + 4\sigma_b + 5}{\left({\sigma_b}^2 + 4\sigma_b + 5\right)\sigma_b} = 0$$

$$3\sigma_b^2 + 8\sigma_b + 5 = 0 \Rightarrow \sigma_b = -1, -1.66$$

ב. ראוט

$$P_{(s)} = s^3 + 4s^2 + 5s + k$$

$$\begin{array}{llll} s^3 & 1 & 5 & 0 \\ s^2 & 4 & k & 0 \\ s^1 & \frac{20-k}{4} & & \\ s^0 & k & & \end{array}$$

$$\frac{20-k}{4} > 0 \Rightarrow k < 20$$
$$k > 0$$

מערכת יציבה עבור: $0 < k < 20$

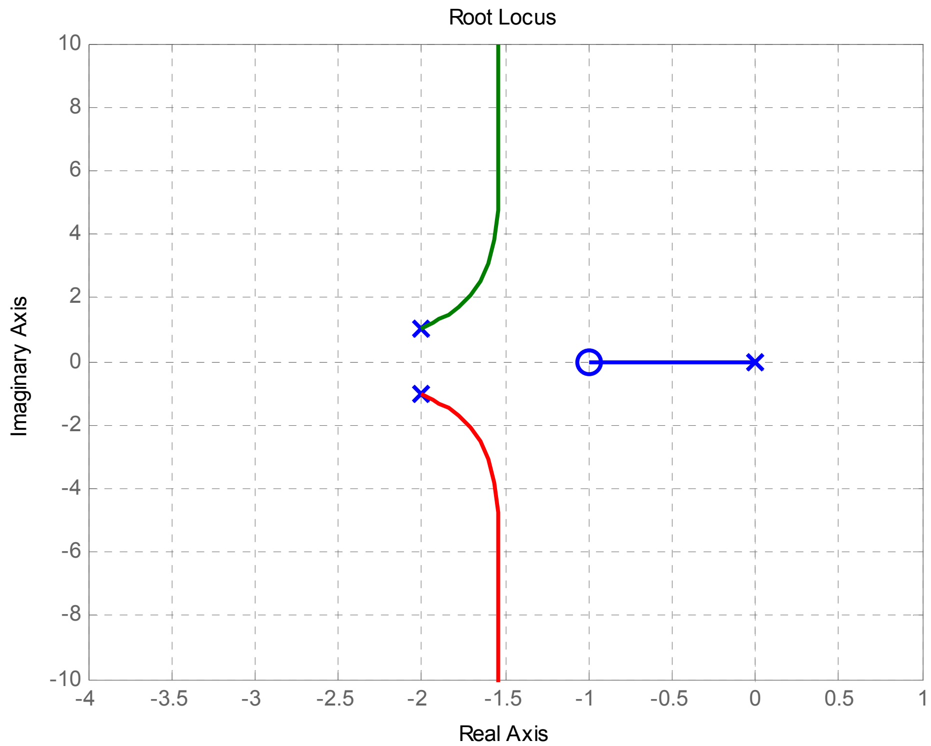
נקודת חיתוך עם הציר המדומה:

נציב את הערך של k=20 בה יש חיתוך עם הציר המדומה

$$4s^2 + k = 0$$

$$4s^2 + 20 = 0 \Rightarrow s = \pm\sqrt{-\frac{20}{4}} = \pm j2.236$$

ג.



זווית אסימפטוטה: $\beta = \frac{(2h+1)180}{n-l} = \frac{(2h+1)180}{3-1} = 90,270^\circ$

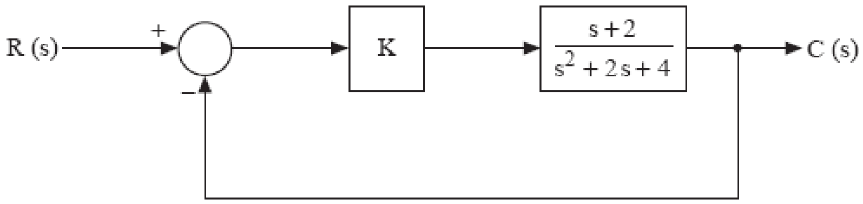
נקודת יציאת אסימפטוטות:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \mathrm{Re}(Pi) - \sum \mathrm{Re}(Zi)}{n-l} = \frac{(-2)+(-2)-(-1)}{2} = -1.5$$

מהגרף רואים כי המערכת יציבה עבור כל k חיובי

תרגיל 2 – חיצוני 2004

באיור לשאלה 1 מתוארת מערכת בקרה עם משוב יחידה.



איור לשאלה 1

א. 1. מהו מספר הענפים של המ.ג.ש. (המקום הגיאומטרי של השורשים) של המערכת הנתונה?

2. מהי האסימפטוטה של המ.ג.ש.?

3. מצא את נקודות ההתחלה ואת נקודות הסיום של המ.ג.ש. .

4. חשב את זוויות ההתחלה ואת זוויות הסיום של המ.ג.ש. .

ב. סרטט את המקום הגיאומטרי של שורשי המערכת הנתונה.

ג. קבע עבור אילו ערכי K תהיה המערכת הנתונה יציבה.

פתרון 2

א.

1. מספר הענפים = מספר הקטבים = 2

2. יש אסימפטוטה אחת והיא בזוית 180מעלות.

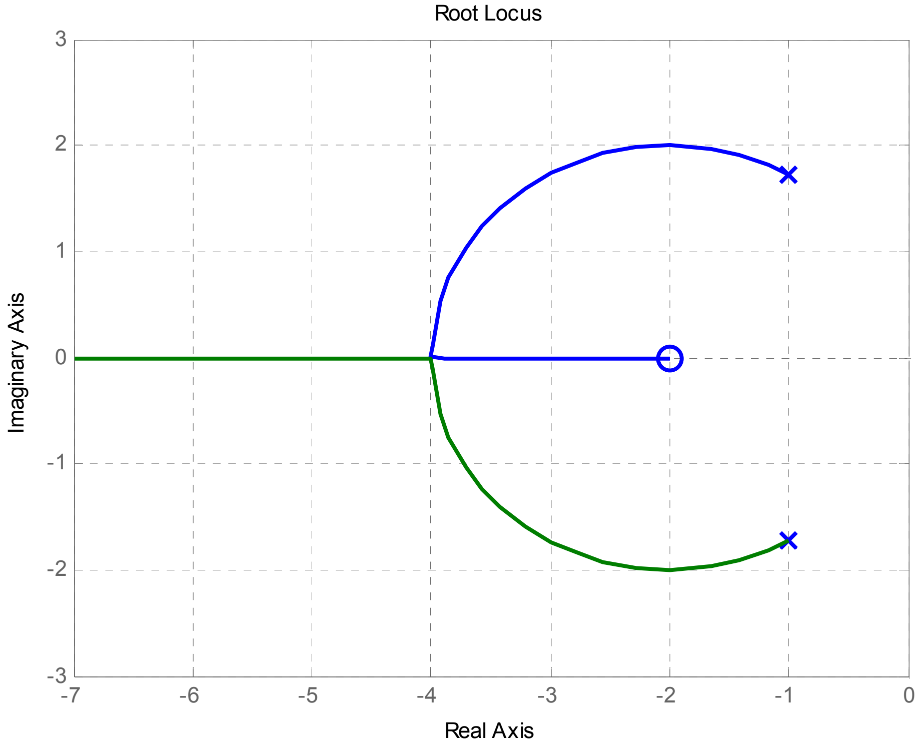
3.נקודות ההתחלה של הקטבים הן : (-1,j1.117),(-1,-j1.17) ונקודות סיום: אחד לאפס (-2)

ואחד לאינסוף.

4. זוית יציאה של הקוטב s=-1+j1.17

$$GH' = \frac{K(s+12)}{s+1+j1.173} = \frac{K(-1+j1.173+2)}{-1+1.173+1+j1.173} = \frac{K(1+j1.17)}{j2.346}$$

$$\phi m = 180 + \arg(GH') = 180 + (-40.5) = 139.5°$$



נקודת פגישה:

$$\frac{1}{\sigma_b+1+j1.173}+\frac{1}{\sigma_b+1-j1.173}=\frac{1}{\sigma_b+2}$$

$$\frac{2\sigma_b+2}{\sigma_b{}^2+2\sigma_b+4}=\frac{1}{\sigma_b+2}$$

$$\frac{2\sigma_b^2+2\sigma_b+4\sigma_b+4-\sigma_b^2-2\sigma_b-4}{\left(\sigma_b{}^2+2\sigma_b+4\right)\left(\sigma_b+2\right)}=0$$

$$\sigma_b^2+4\sigma_b=0\Rightarrow\sigma_b=-4$$

ג. ראוט:

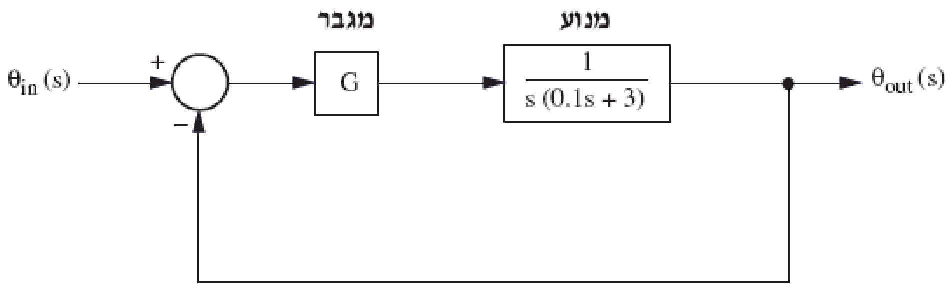
$$P_{(s)} = s^2 + 2s + 4 + ks + 2k = s^2 + s(2+k) + (4+2k)$$

s^2	1	$4+2k$
s^1	$2+k$	0
s^0	$4+2k$	

מערכת יציבה עבור: $4+2k>0 \,\&\, 2+k>0 \Rightarrow k>-2$

תרגיל3 – חיצוני 2006

באיור לשאלה 2 נתון תרשים מלבנים של מערכת לבקרת זווית הסיבוב של מנוע.



איור לשאלה 2

א. סרטט במחברתך את המקום הגאומטרי של שורשי המערכת הנתונה.

ב. האם יציבותה של המערכת תלויה בהגבר G ? נמק את תשובתך.

ג. מה צריך להיות ערכו של G , כך שתתקבל מערכת בקרה בעלת מקדם ריסון $\zeta = 0.5$?

ד. 1. מצא את ערכו של G , שעבורו תתקבל מערכת בעלת תדירות זוויתית טבעית בלתי מרוסנת $\omega_n = 15\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

2. מה ערכו של מקדם הריסון שיתקבל במקרה זה?

פתרון 3

א.

$$GH_{(s)} = \frac{k}{s(0.1s+3)} = \frac{10k}{s(s+30)}$$

1. מספר הענפים = מספר הקטבים = 2

2. יש 2 אסימפטוטות לאינסוף בזוית 90 ו-270 מעלות.

$$\beta = \frac{(2h+1)180}{n-l} = 90°,270°$$

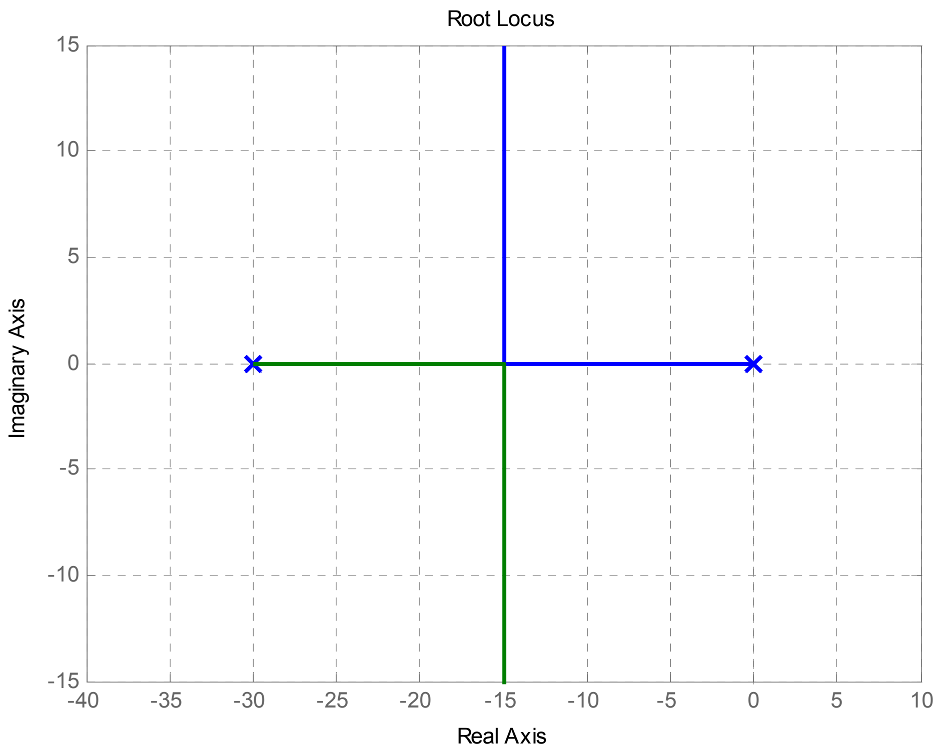
$$\sigma_0 = \frac{-30+0}{2} = -15$$

<u>נקודת פגישה:</u>

$$\frac{1}{\sigma_b}+\frac{1}{\sigma_b+30}=0$$

$$\frac{2\sigma_b+30}{(\sigma_b+30)\sigma_b}=0$$

$$2\sigma_b+30=0 \Rightarrow \sigma_b=-15$$



ב. עבור $G>0$ הקטבים מצד שמאל לציר Y לכן המערכת יציבה.

עבור $G<0$ הקוטב 0 נע ימינה לציר Y ולכן המערכת אינה יציבה.

ג.

$$\frac{C}{R}=\frac{\frac{10k}{s(s+30)}}{1+\frac{10k}{s(s+30)}}=\frac{10k}{s(s+30)+10k}=\frac{10k}{s^2+30s+10k}$$

$$s^2+30s+10k=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

$$10k=\omega_n^2$$

$$2\xi\omega_n=30$$

$$\xi=0.5\Rightarrow\omega_n=30\Rightarrow k=90$$

ד.

$$s^2+30s+10k=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

$$10k=\omega_n^2=15^2=225\Rightarrow k=22.5$$

$$2\xi\omega_n=30$$

$$\xi=\frac{30}{2\cdot 2.25}=0.67$$

תרגיל 4

פונקצית התמסורת בחוג פתוח של מערכת בקרה הפועלת בחוג סגור הינה:

$$GH_{(S)} = \frac{k(s+10)}{(s+1)(s+4)}$$

שרטט את המקום ההנדסי של השורשים (R.L)

פתרון 4

א.מספר הענפים = מספר הקטבים = 2

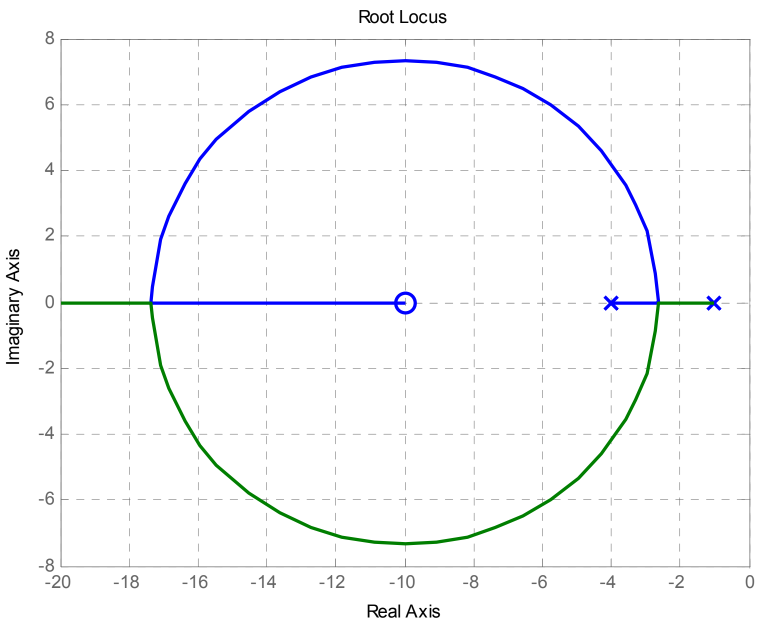
ב.יש אסימפטוטה אחת והיא בזוית 180מעלות.

ג. נקודות ההתחלה של הקטבים הן : (-1), (-4) ונקודות סיום: אחד לאפס (-10) ואחד לאינסוף.

ד. נקודת פגישה:

$$\frac{1}{\sigma_b+1}+\frac{1}{\sigma_b+4}=\frac{1}{\sigma_b+10}$$

$$\frac{(\sigma_b+4)(\sigma_b+10)+(\sigma_b+1)(\sigma_b+10)-(\sigma_b+1)(\sigma_b+4)}{(\sigma_b+1)(\sigma_b+4)(\sigma_b+10)} \Rightarrow \sigma_b=(-2.65),(-17.35)$$



<u>תרגיל 5</u>

שרטט RL של הפונקציות הבאות:

א. $$GH_{(S)}=\frac{K(s+10)}{(s+2)(s+6)}$$

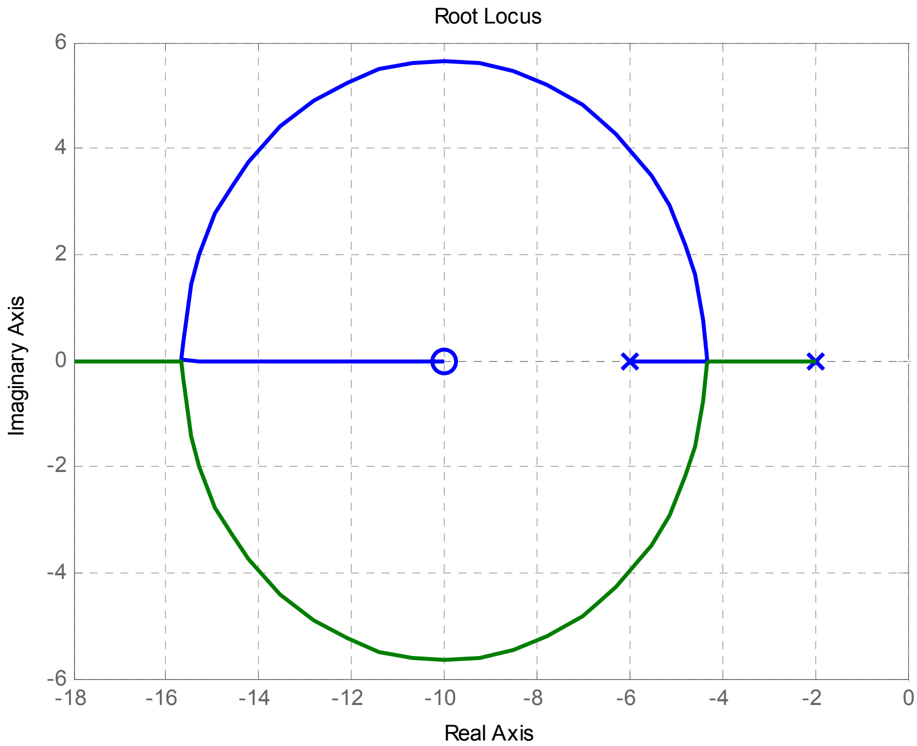
ב. $$GH_{(S)}=\frac{K(s+3)}{(s+1)(s+4)(s^2+4s+8)}$$

ג. $$GH_{(S)}=\frac{K(s+4)}{(s^2+2s+10)(s+10)}$$

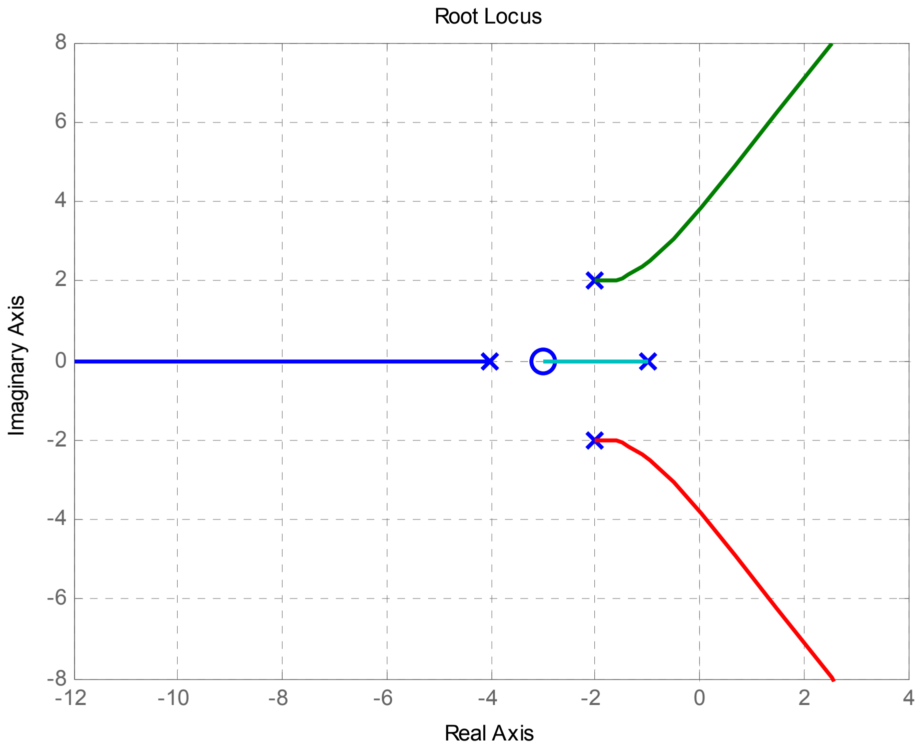
ד. $$GH_{(S)}=\frac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$$

<u>תשובה 5</u>

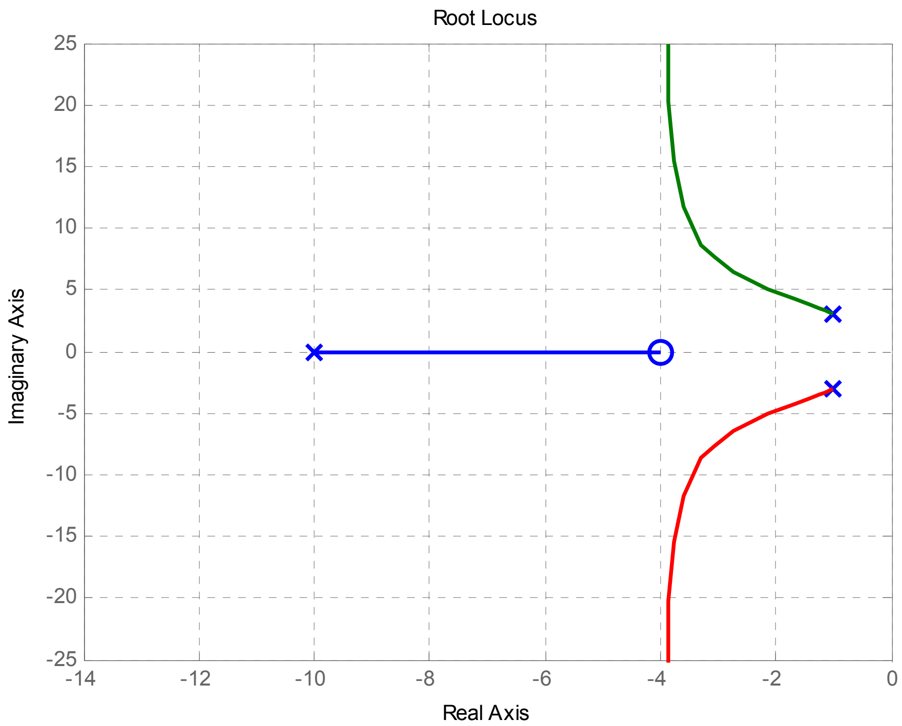
א.



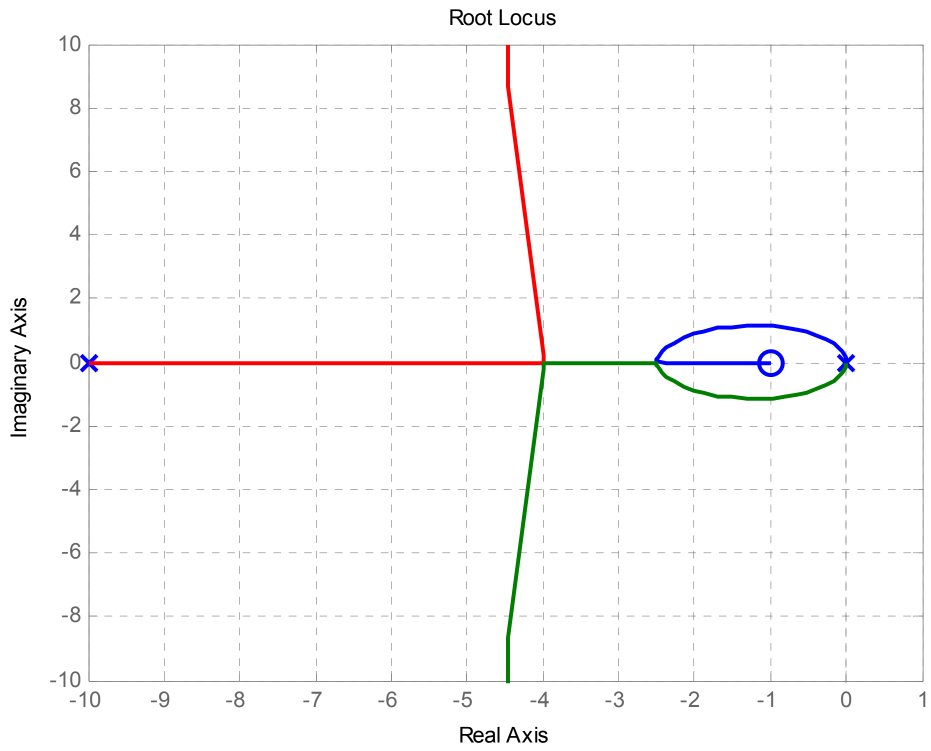
ב.


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4

ג.


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0

ד.


Root Locus
Imaginary Axis
Real Axis
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1