

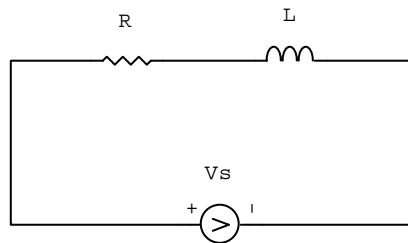
ייצוג מערכות באמצעות משוואות דיפרנציאליות ומשוואות לפלס

מעגלים חשמליים

רכיב	מישור הזמן	מישור לפלס
נגד R - חוק אום	$u_{(t)} = i_{(t)} \cdot R$	$U_{(s)} = I_{(s)} \cdot R$
סליל L - חוק לנץ	$u_{(t)} = L \cdot \frac{di_{(t)}}{dt}$	$U_{(s)} = I_{(s)} \cdot (sL)$
קבל - חוק פרדיי	$u_{(t)} = \frac{1}{C} \cdot \int i_{(t)} dt$	$U_{(s)} = I_{(s)} \cdot \left(\frac{1}{sC} \right)$

דוגמה למעגלים חשמליים מסדר ראשון

מעגל RL טורי

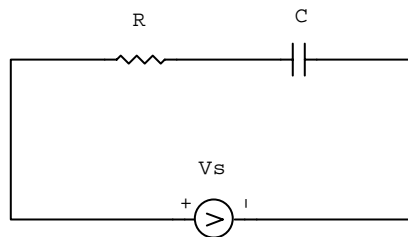


$$V_{s(t)} = R \cdot i_{(t)} + L \frac{di_{(t)}}{dt} \quad \text{- משוואה דיפרנציאלית}$$

למשוואה מסדר ראשון יש תנאי התחלה אחד והוא $i_{(0)}$, במעגל הנתון הזרם

ההתחלתי נקבע ע"י הסליל ולכן $i_{(0)} = i_{L(0)}$.

מעגל RC טורי

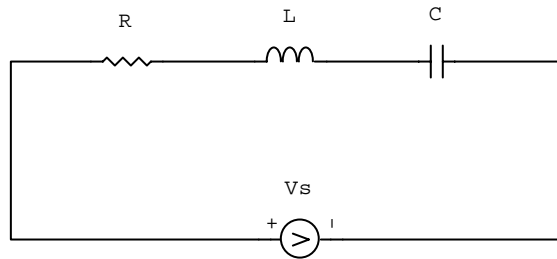


$$V_{s(t)} = R \cdot i_{(t)} + \frac{1}{C} \int i_{(t)} dt \quad \text{- משוואה דיפרנציאלית}$$

$$\frac{d(V_{s(t)})}{dt} = R \cdot \frac{di_{(t)}}{dt} + \frac{1}{C} i_{(t)} \quad \text{- נגזור את המשוואה ונקבל}$$

$$i_{(0)} = \frac{V_s - V_{C(0)}}{R} \quad \text{- תנאי התחלה של הזרם במעגל נקבע לפי}$$

דוגמא למעגל חשמלי מסדר שני מעגל RLC טורי



$$V_{s(t)} = R \cdot i_{(t)} + L \frac{di_{(t)}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{(t)} dt \quad \text{- משואה דיפרנציאלית}$$

$$\frac{d(V_{s(t)})}{dt} = L \frac{d^2 i_{(t)}}{dt^2} + R \cdot \frac{di_{(t)}}{dt} + \frac{1}{C} i_{(t)} \quad \text{- נגזור את המשואה ונקבל}$$

למעגל שני תנאי התחלה $i_{(0)}$ ו- $i'_{(0)}$

במעגל הנתון הזרם ההתחלתי נקבע ע"י הסליל ולכן $i_{(0)} = i_{L(0)}$

והתנאי השני נקבע מהמשואה בזמן 0 :

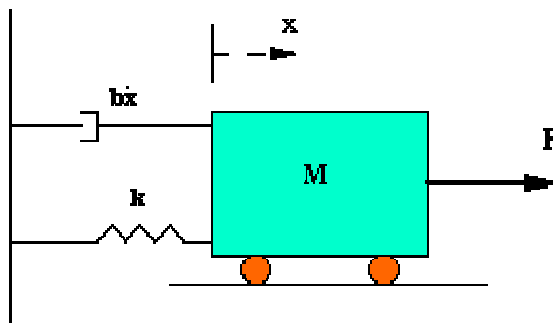
$$V_{s(0)} = R \cdot i_{(0)} + L \frac{di_{(0)}}{dt} + V_{C(0)} \Rightarrow \Rightarrow \frac{di_{(0)}}{dt} = \frac{V_{s(0)} - V_{C(0)} - R \cdot i_{(0)}}{L}$$

מערכות מכאניות

רכיבים מכאניים

רכיב	מישור הזמן	אנלוגיה לחשמל	a - תאוצה
מסה m (kg)	$F_{(t)} = m \cdot a_{(t)}$	$M \equiv C$	
קפיץ K (n/m)	$F_{(t)} = K \cdot x_{(t)}$	$K \equiv \frac{1}{L}$	x - העתק
בולם B (n/m/s)	$F_{(t)} = B \cdot v_{(t)}$	$B \equiv \frac{1}{R}$	v - מהירות

מערכת הכוללת מסה, קפיץ ובולם



לפי חוק השני של ניוטון

$$\sum F_{(t)} = m \cdot a_{(t)}$$

$$F_{(t)} - F_B - F_K = m \cdot a_{(t)}$$

$$F_{(t)} - B \cdot v_{(t)} - K \cdot x_{(t)} = m \cdot a_{(t)}$$

הקשר בין התאוצה להעתק הוא : $a_{(t)} = x''_{(t)}$

ובין המהירות להעתק : $v_{(t)} = x'_{(t)}$

אחרי הצבה נקבל משוואה דיפרנציאלית מסדר שני

$$F_{(t)} = m \cdot a_{(t)} + B \cdot v_{(t)} + K \cdot x_{(t)}$$

$$F_{(t)} = m \cdot x''_{(t)} + B \cdot x'_{(t)} + K \cdot x_{(t)}$$

תנאי התחלה $x_{(0)}$ - העתק בזמן אפס ו- $v_{(0)} = x'_{(0)}$ מהירות התחלתית

כדי לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית באמצעות התמרות לפלס, נמיר את הנגזרת הראשונה והשנייה לפי:

$$L[f'_{(t)}] = s \cdot F_{(s)} - f_{(0)}$$

$$L[f''_{(t)}] = s^2 \cdot F_{(s)} - s \cdot f_{(0)} - f'_{(0)}$$

דוגמא

מצא את פונקציית התמסורת X/F במישור לפלס (תנאי התחלה = 0)

$$F_{(t)} = m \cdot x''_{(t)} + B \cdot x'_{(t)} + K \cdot x_{(t)}$$

$$F_{(s)} = m \cdot s^2 X_{(s)} + B \cdot s X_{(s)} + K \cdot X_{(s)}$$

$$\frac{X_{(s)}}{F_{(s)}} = \frac{1}{m \cdot s^2 + B \cdot s + K} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{B}{m} \cdot s + \frac{K}{m}}$$